



دانشگاه صنعتی سهند  
تکلیف ۲ - درسی معادلات دیفرانسیل  
پائیز ۸۸ - مدرس: فرضی<sup>۱</sup>

تاریخ تحویل: ۸۸/۹/۱۰

## خلاصه درس

فرض کنید  $x = 0$  نقطه منفرد منظم معادله دیفرانسیل زیر باشد

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad x \neq 0, \quad (1)$$

و فرض کنید  $r_1$  و  $r_2$  ریشه‌های معادله مشخصه زیر باشند

$$r(r-1) + a_0 r + b_0 = 0,$$

که  $a_0$  و  $b_0$  از بسط سری‌های زیر بدست می‌آیند

$$xa(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

$$x^2 b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

در این صورت معادله (۱) دارای دو جواب مستقل خطی  $y_1$  و  $y_2$  است که شکل این جوابها به صورت زیر به  $r_1$  و  $r_2$  وابسته است:

حالت ۱ اگر  $r_1$  و  $r_2$  متمایز باشند و اختلاف آنها عدد صحیح نباشد، آنگاه

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right), \quad c_0 = 1,$$

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^n \right), \quad c_0^* = 1.$$

حالت ۲ اگر  $r_1 = r_2 = r$  آنگاه

$$y_1(x) = |x|^r \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right), \quad c_0 = 1,$$

$$y_2(x) = |x|^r \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^n \right) + y_1(x) \ln |x|.$$

<sup>۱</sup> farzi@sut.ac.ir

حالت ۳ اگر  $r_1 - r_2$  عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right), \quad c_0 = 1,$$

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^n \right) + c_{-1}^* y_1(x) \ln |x|, \quad c_0^* = 1.$$

و  $c_{-1}^*$  ممکن است برابر صفر باشد.

همچنین، اگر سریهای توانی  $xa(x)$  و  $x^2b(x)$  در  $|x| < R$  معتبر باشند، در این صورت جوابهای  $y_1$  و  $y_2$  در  $0 < |x| < R$  معتبر هستند.

## مسائل

(۱) بسط مکلورن توابع زیر را بنویسید  
 الف)  $\sin x^2$       ب)  $\cos x^2$       ج)  $e^{x^2}$       د)  $e^{-x^2}$

(۲) اگر  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  جواب معادله  $y'' + xy' + y = 0$  با شرایط  $y(0) = 1$  و  $y'(0) = 1$  باشد، در این صورت  $c_0$ ،  $c_1$  و  $c_2$  را بدست آورید.

(۳) سریهای تیلور زیر را بدست آورید

الف)  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, |x| < 1$   
 ب)  $\sin^{-1}(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{24} \frac{x^5}{5} + \frac{1}{240} \frac{x^7}{7} + \dots, |x| < 1$   
 ج)  $\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots, 0 < x < 2$   
 د)  $\frac{1}{2-x} = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + \dots, 0 < x < 2$

(۴) جواب معادلات زیر را با روش سری توانی بدست آورید

الف)  $(1-x)y'' - y' + xy = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1$   
 ب)  $xy'' - x^2y' + (x^2 - 2)y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$   
 ج)  $y'' - xy' + y = -x \cos x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$   
 د)  $y'' - 2xy' - 2y = x, \quad y(0) = 1, y'(0) = -\frac{1}{4}$

(۵) معادله ایری (Airy Equation)

$$y'' - xy = 0$$

دارای کاربردهای زیادی است. جواب عمومی آن را بدست آورید.

(۶) معادله هرمیت (Hermite Equation) عبارتست از

$$y'' - 2xy' + 2py = 0$$

که  $p$  مقدار ثابت است. این معادله در مکانیک کوانتومی در ارتباط با معادله شرودینگر برای نوسانگر همساز پیش می آید. نشان دهید اگر  $p$  عدد صحیح مثبت باشد یکی از جوابهای مستقل خطی معادله هرمیت یک چندجمله‌ای است که چندجمله‌ای هرمیت  $H_p(x)$  نامیده می شود.

(۷) نشان دهید روش سری توانی در  $x = 0$  برای معادله زیر منجر به شکست می شود

$$x^4 y'' + 2x^3 y' - y = 0.$$

(۸) جواب مساله مقدار اولیه زیر را بدست آورید

$$y''' - xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0.$$

(۹) چهار جمله اول جواب سری مسائل مقدار اولیه زیر را بدست آورید

الف)  $y'' + (\sin x)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

ب)  $y'' - e^x y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$

(۱۰) جواب معادلات زیر را با روش فروبنیوس بدست آورید

الف)  $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0,$

ب)  $2xy'' + (1+x)y' - 2y = 0,$

ج)  $x^2 y'' + xy' + (1+x)y = 0.$

(۱۱) چهار جمله اول هرکدام از دو جواب مستقل خطی  $y_1$  و  $y_2$  معادله زیر را بدست آورید

$$\sin xy'' + y = 0.$$

۱۲) برای معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + (4x - 1)y' + 2y = 0$$

نقطه  $x = 0$  یک نقطه منفرد نامنظم است.

الف) تابع  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$  را در این معادله قرار داده و نتیجه بگیرید  $r = 0$  و جواب متناظر با آن از روش فروبنیوسی عبارتست از

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! x^n. \quad (2)$$

ب) ثابت کنید سری (۲) دارای شعاع همگرایی  $R = 0$  است.

بنابراین، هرچند در یک نقطه منفرد نامنظم جواب فروبنیوسی به صورت ظاهری در معادله صدق کند، این جواب ممکن است یک جواب معتبر نباشد.

۱۳) با روش فروبنیوسی جواب معادلات زیر را در  $x = 0$  بدست آورید

الف)  $y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0,$

ب)  $x^2 y'' - x(x+1)y' + y = 0,$

ج)  $x(x+1)^2 y'' + (1-x^2)y' - (1-x)y = 0.$

۱۴) نشان دهید جواب مستقل خطی دوم معادله

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

عبارتست از

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^{2n}, \quad x > 0.$$

موفق باشید.